

فصل اول

مقدمه و یادآوری

مقدمه

مکانیک شاخه‌ای از علم فیزیک است که از لحاظ قدمت، قدیمی‌ترین علم فیزیکی است که در آن اثرات اجسام و نیروهای متقابل بر روی یکدیگر از نظر حرکت و سکون مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مکانیک جدید بر اساس قانون نیوتن (۱۷۲۷-۱۶۴۲) بنا شده است، اگر چه تئوری نسبیت انشتین محدودیتهایی برای قانون نیوتن ایجاد کرده ولی این محدودیتها برای اجسام و فواصل معمولی و مورد مطالعه مهندسی و برای حرکاتیکه نسبت به سرعت نور آهسته‌تر می‌باشند (سرعت نور ۳۰۰/۰۰۰ کیلومتر در ثانیه) ناچیز و قابل صرفنظر کردن می‌باشد.

ابعاد و واحدهای اصلی مکانیک (طول، زمان و جرم)

برای اندازه‌گیری پدیده‌های مختلف در طبیعت واحدهای اندازه‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرند. طول، سطح، حجم، زمان، نیرو، سرعت، شتاب، درجه حرارت و ... که هر کدام بایستی با واحد مربوطه خود اندازه‌گیری شوند. برای اندازه‌گیری کمیت مربوط به هر یک از این اشیاء و پدیده‌ها یک واحد معین انتخاب شده است. مثلاً برای طول از واحدهایی نظیر میلیمتر، سانتیمتر، متر، فوت، اینچ و ... استفاده می‌گردد.

نکته ۱: بدیهی است در صورتیکه واحد طول معین شود واحدهای سطح و حجم نیز خود به خود تعیین می‌شوند.

واحدهای مثل طول را **واحد اصلی** یا اولیه و واحدهایی مانند سطح و حجم که بر مبنای واحد اصلی تعیین می‌شوند را **واحدهای ثانوی** یا فرعی می‌نامند (واحدهای اصلی مستقل از یکدیگر هستند). بعد از انتخاب واحد طول "L" ملاحظه می‌گردد که زمان رابطه‌ای با آن ندارد، لذا زمان نمی‌تواند واحد فرعی طول باشد، پس می‌توان آنرا یک واحد اصلی نامید، زمان را با "T" نمایش می‌دهیم، واحد اصلی زمان "ثانیه" می‌باشد. اکنون که واحدهای طول و زمان معین شده‌اند می‌توان سرعت و شتاب را تعریف و واحد آنها را معین کرد. سرعت یک جسم مقدار طول پیموده شده توسط جسم در واحد زمان و شتاب، تغییر سرعت آن جسم در واحد زمان است.

جرم خاصیتی است که هر ماده دارد و می‌توان گفت زمانی دو ماده دارای یک جرم هستند که در یک نقطه معین از زمین وزن مساوی داشته باشند. جرم یک واحد اصلی است که آن را با "M" نشان می‌دهند. واحد اصلی جرم کیلوگرم است. برای تعریف جامع‌تر جرم دو قانون نیوتن را بیان می‌کنیم:

الف) قانون جاذبه عمومی نیوتن

فرض کنید دو ذره مادی A و B مطابق شکل قرار گرفته باشند، قانون جاذبه عمومی نیوتن بیان می‌کند که بین این دو نقطه مادی نیروی جاذبه‌ای وجود دارد به نحوی که اثر هر یک از نقاط مادی روی دیگری مساوی و مختلف‌الجهت می‌باشد. یعنی جرم A نیروی F به جرم B و جرم B نیروی جاذبه F به جرم A وارد می‌کنند (یعنی بین نقاط مادی A و B نیروی جاذبه

$$F = G \frac{m_A m_B}{r^2}$$

وجود دارد) و داریم :

مثال ۱: اگر فاصله دو ذره نصف شود، نیروی جاذبه بین آنها چند برابر می‌گردد؟

(۴) تغییری نمی‌کند

(۳) ۴ برابر

(۲) $\frac{1}{4}$ برابر

(۱) ۲ برابر

پاسخ: گزینه «۳» نیروی جاذبه بین دو ذره با توان دوم معکوس فاصله متناسب است، لذا:

$$F \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} r \rightarrow \frac{1}{2}r \\ F \rightarrow 4F \end{cases}$$

**(ب) قانون دوم نیوتن**

شتاب حرکت یک جسم تحت اثر نیروی F تناسب مستقیم با نیرو دارد، عدد ثابت تناسب، جرم جسم می‌باشد. یعنی:

$$F=Ma$$

سیستم واحدهای اندازه‌گیری مطلق**(الف) سیستم متریک**

(الف) MKS: در این سیستم جرم یک کیلوگرم در سطح دریا واحد جرم است که کیلوگرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این سیستم نیوتن است، یک نیوتن نیروی است که به یک کیلوگرم جرم شتابی معادل یک متر بر مربع ثانیه بدهد. چون در سطح دریا شتاب جاذبه زمین برابر $g = 9.80665 \text{ m/S}^2$ می‌باشد، بنابراین وزن یک کیلوگرم معادل 9.80665 نیوتن است. $F = mg = 1 \times 9.80665$ نیوتن
(ب) CGS: در این دستگاه جرم یک گرم در سطح دریا واحد جرم است که گرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این دستگاه "دین" است و چون $g = 980.665 \text{ cm/S}^2$ است پس هر گرم وزن تقریباً 981 دین می‌باشد.

(ب) سیستم انگلیسی

در این سیستم جرم یک ماده که دارای وزنی معادل یک پوند در سطح دریا می‌باشد واحد جرم است و «پوند جرم» نامیده می‌شود. بنابراین واحد نیرو در این سیستم، نیروی است که به جرم یک «پوند جرم» شتاب یک فوت بر مربع ثانیه بدهد که «پوندال» نامیده می‌شود. توجه نمائید که وزن یک پوند جرم مساوی $F = Mg$ پوندال است که در آن g شتاب ثقل زمین در محل آزمایش است. اگر محل آزمایش سطح دریا باشد، وزن این جرم مساوی یک پوند است (بنا به تعریف پوند جرم) و چون در سطح دریا $g = 32.17405 \text{ Ft/Sec}^2$ است، بنابراین وزن یک پوند معادل پوندال 32.17405 می‌باشد، به عبارتی:

$$\text{پوندال} = 32.17405 (1 \text{ Ft/Sec}^2) \times (\text{یک پوند جرم}) \times 32.17405 (\text{یک پوند جرم}) = 32.17405 \text{ Ft/Sec}^2 = 1 \text{ پوند}$$

سیستم واحدهای اندازه‌گیری مهندسی**(الف) سیستم متریک (MKS)**

در این دستگاه یک «کیلوگرم وزن» واحد نیرو است، واحد جرم در این دستگاه جرمی است که اگر واحد نیرو (کیلوگرم وزن) به آن وارد شود شتاب واحد پیدا کند. ملاحظه می‌شود که این واحد 9.81 برابر کیلوگرم جرم خواهد بود.

(ب) سیستم انگلیسی

در این سیستم «پوند وزن» (وزن یک پوند جرم در کنار دریا) واحد نیرو است، واحد جرم «اسلاگ» می‌باشد، یک اسلاگ جرمی است که تحت اثر یک پوند وزن شتاب واحد (1 Ft/Sec^2) پیدا کند. بنابراین وزن واحد جرم (اسلاگ) در کنار دریا مساوی پوند $(32/2) \times (1) = F = Mg$ و جرم این وزنه پوند جرم و معادل $32/2$ می‌باشد. بنابراین هر اسلاگ معادل $32/2$ پوند است.

نکته ۲: به طور خلاصه وقتی وزن در کنار دریا داده شده باشد مقدار عددی جرم آن به پوند جرم همان وزن است و مقدار عددی جرم آن به اسلاگ وزن آن تقسیم بر $32/2$ می‌باشد.

مثال ۲: وزن یک جسم در کنار دریا 644 پوند است. وزن این جسم در محلی که شتاب ثقل زمین $30/5$ فوت بر مربع ثانیه است، بر حسب پوند کدام است؟

$$357 \# (4)$$

$$910 \# (3)$$

$$610 \# (2)$$

$$257 \# (1)$$

پاسخ: گزینه «۲» اگر از فرمول $F = Ma$ استفاده کنیم، که M بر حسب اسلاگ و a بر حسب فوت بر مجذور ثانیه است خواهیم داشت: (در کنار دریا) $W_0 = M(32/2)$ و در محلی با شتاب ثقل g : $W = Mg$ اگر M را در این دو رابطه حذف کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{W}{W_0} = \frac{g}{32/2} \Rightarrow W = W_0 \frac{g}{32/2}$$

$$W = 644 \frac{30/5}{32/2} = 610 \#$$

مثال ۳: وزن جسمی در شرایط متعارف 700 پوند است. جرم آن بر حسب اسلاگ چقدر می‌باشد؟

$$71/3 (4)$$

$$70 (3)$$

$$65/6 (2)$$

$$21/7 (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» جرم جسم بر حسب اسلاگ $21/7 = \frac{700}{32/2}$ می‌باشد.



دستگاه واحدهای معمول:

کمیت	واحد M.K.S	واحد C.G.S	واحد انگلیسی	واحد مهندسی آمریکائی
جرم	کیلوگرم جرم	گرم	پوند جرم	اسلاگ
طول	متر	سانتی‌متر	فوت	فوت
زمان	ثانیه	ثانیه	ثانیه	ثانیه
نیرو	نیوتن	دین	پوندال	پوند نیرو

تبدیل واحدها:۱ اینچ $\equiv ۲/۵۴$ سانتیمتر۱ فوت $\equiv ۱۲$ اینچ $\equiv ۳۰/۵$ سانتیمتر $\equiv ۰/۳۰۵$ متر $\equiv \frac{۱}{۵۲۸۰}$ مایل۱ اسلاگ $\equiv ۳۲/۲$ پوند جرم۱ گرم $\equiv ۱۰^{-۳} \times ۲/۲۰۵$ پوند جرم $\equiv ۰/۶۸۵ \times ۱۰^{-۴}$ اسلاگ۱ پوند نیرو $\equiv ۴۴۵$ دین $\equiv ۳۲/۲$ پوندال $\equiv ۱۶$ اونس۱ نیوتن $\equiv ۱۰^{-۵}$ دین**ایده‌آل نمودن مسائل مکانیک**

یکی از مسائل مهمی که در مهندسی باید به آن توجه کرد فرضیات در حل مسائل و به عبارت دیگر ایده‌آل کردن آن مسائل است. اکثر مسائل مهندسی، پیچیده می‌باشند و وقتی مدل ریاضی از روی آن ساخته می‌شود مسئله پیچیده ریاضی به وجود می‌آورد که حل آن اگر با معلومات حاضر غیرممکن نباشد بسیار مشکل است. در چنین شرایطی یا با فرضیاتی مسئله مکانیک را ساده می‌کنند به نحوی که قابل حل شود و یا مسئله ریاضی بدست آمده را تقریبی حل می‌کنند. در این جا هدف روش اول است با این شرط که فرضیات ساده کننده بگونه‌ای باشند که جواب و ماهیت مسئله را عوض نکنند. در زیر چند نمونه از این ایده‌آل سازی‌ها ذکر شده‌اند:

ماده متصل

همانطور که می‌دانیم مواد در طبیعت هر چقدر هم که بهم فشرده شده باشند متصل نبوده و فضائی بین الکترونها و هسته هر اتم وجود دارد. از آنجایی که در مهندسی با موادی به مراتب بزرگتر از اتم سروکار داریم و فقط مقدار و میانگین خواص در حجم معین مورد استفاده دارند، لذا از این فضاها (که بعلت به هم فشرده نبودن جسم به وجود می‌آیند) صرف‌نظر کرده و فرض می‌کنیم که جسم یک ماده، بهم پیوسته و متصل است.

جسم صلب (سخت)

منظور از جسم صلب جسمی است که در اثر نیروهای وارده تغییر شکل ندهد. در مقاومت مصالح خواهید دید که هر جسمی هر چند که سخت باشد تحت اثر هر نیروئی هر چند کوچک تغییر شکل می‌دهد. (از لحاظ علمی جسم صلب به صورت تئوری وجود ندارد) ولی در فرضیه جسم صلب این گونه استدلال می‌شود که تغییر شکلها آنقدر کوچک می‌باشند که اثر قابل توجهی نداشته و در نتیجه مسئله اثری ندارند. از این فرضیه در حل مسائل استاتیک استفاده می‌گردد.

ذره جرم‌دار

قوانین نیوتن برای ذره هندسی جرم‌دار وضع شده‌اند، یعنی قوانین نیوتن که اصول مکانیک بر آن بنا شده‌اند در مورد ذره هندسی بدون بعد و دارای جرم می‌باشند. واضح است چنین ذره بدون بُعد و جرم داری در طبیعت وجود ندارد، ولی با فرض وجود آن بسیاری مسائل مکانیک حل می‌شود و در بسیاری از موارد جرم تمام ماده را در مرکز آن متمرکز کرده (به طور فرضی) و آنرا به صورت ذره‌ای جرم‌دار فرض می‌کنیم.

نیروهای متمرکز

در مواردی که محل اثر نیرو یک سطح کوچک از جسم است و انتشار نیرو را در روی سطح نمی‌دانیم، می‌توان تمام نیروها را با یک نیرو جایگزین کرده و نقطه اثر آن نیرو را در جسم (که یک نقطه است) نقطه اثر تمام نیروها فرض کرد، بدیهی است که در طبیعت نیروئی وجود ندارد که بر یک ذره هندسی وارد شود ولی این فرض و ایده‌آل کردن نیرو در سهولت محاسبات بسیار موثر است و همانطور که بعداً در تعادل نیروها خواهیم دید استفاده از نیروهای متمرکز در جسم در مباحث استاتیک توصیه می‌گردد.



بردارها و کمیت‌های غیر جبری

کمیت‌های فیزیکی به دو دسته اسکالر و برداری تقسیم می‌شوند.

کمیت اسکالر (عددی، نرده‌ای) کمیتی است که فقط دارای یک مقدار است. نمونه‌های چنین کمیت‌هایی: جرم، طول، زمان و درجه حرارت می‌باشند. در مقابل کمیت‌های اسکالر، کمیت‌های برداری قرار دارند که برای توصیف آنها بیش از یک مقدار جبری لازم است. مثلاً برای بیان سرعت یک ذره مادی باید اطلاعات زیر داده شوند:

۱- مقدار آن کمیت بر حسب واحد اندازه‌گیری (مثلاً فوت بر ثانیه یا متر بر ثانیه و ...)

۲- جهت حرکت ذره مادی (برای این منظور می‌توان از یک دستگاه مختصات ثابت استفاده کرد)، به این ترتیب که از یک قطعه خط استفاده می‌کنیم که طول آن با واحد معین اندازه‌گیری طول، مساوی مقدار داده شده در قسمت "۱" باشد (مقدار سرعت) و آن را بوسیله یک پیکان (\longrightarrow) جهت‌دار می‌کنیم به طوریکه سر پیکان جهت حرکت را نشان بدهد. این قطعه خط را بردار و امتداد این بردار را راستا یا محمل آن بردار می‌نامیم. کمیت‌هایی مثل سرعت، شتاب، نیرو و گشتاور را که علاوه بر مقدار، **راستا و جهت** نیز دارند **کمیت برداری** می‌نامند.

بردارها بر حسب کاربرد سه نوعند:

۱) بردار آزاد

بردار آزاد، برداری است که می‌توان آنرا بدون تغییر اثر به هر نقطه فضا انتقال داد به شرطی که راستای آن موازی راستای اولیه، در همان جهت و با همان مقدار اولیه باشد. دو بردار آزاد را در صورتیکه موازی، هم جهت و از نظر مقدار مساوی باشند، **همسنگ** می‌نامند. مانند: بردار گشتاور، برآیند نیرو و کوپل (جفت نیرو).

۲) بردار لغزان

بردار لغزان، برداری است که می‌توان آنرا با حفظ جهت اولیه به هر نقطه از راستای آن بردار منتقل کرد، اگر دو بردار لغزان بر روی یک راستا، دارای یک جهت و یک مقدار باشند مساوی‌اند، چنین دو برداری را **هم‌رئز** می‌نامند. مانند: بردار نیرویی که به یک جسم صلب اثر می‌کند.

۳) بردار بسته

بردار بسته، برداری است که متعلق به یک موقعیت واحد است و به هیچ وجه قابلیت جابجایی ندارد. نمونه بردار بسته، بردار مکان یک ذره مادی در دستگاه مختصات دکارتی می‌باشد.

جبر بردارها

بردار، قدر مطلق (مقدار یا اساس) و حاصلضرب بردار در یک عدد جبری

همانطور که قبلاً گفته شد یک بردار را توسط قطعه خط مستقیم و محدود نشان می‌دهیم. سهم یا نشان هر قطعه خط، جهت بردار را نشان خواهد داد. طول قطعه خط که نماینده مقدار جبری آن کمیت است مقدار، اساس و یا مقدار مطلق آن بردار نامیده می‌شود. توجه نمایید که منظور از مقدار یک بردار، عدد مثبت طول آن می‌باشد. لذا مقدار یک بردار مانند \vec{A} همیشه مثبت است و با $|\vec{A}|$ نمایش داده می‌شود.

برای به دست آوردن مقدار برداری مانند: $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

بردارها را با حروف بزرگ یا کوچک لاتین و خط سهمی داری در بالای آن " \vec{A} "، و یا خطی ساده در

زیر آن " \underline{A} " و گاهی با نامبردن حروف اول و آخر قطعه خط نماینده بردار نشان می‌دهیم، به نحوی که

جهت بردار از طرف حرف سمت چپ به طرف حرف سمت راست باشد (مثل بردار \overline{AB} یا بردار \underline{AB}).



توضیح: در متن درس بردار دلخواه A با نماد \underline{A} نمایش داده شده است. ولی در اکثر تست‌های انتهای فصل و پاسخ‌های تشریحی از نماد \vec{A} استفاده شده است. به هر حال دو نماد \vec{A} و \underline{A} با هم تفاوتی ندارند.

بنا به تعریف، حاصل ضرب یک عدد جبری α در یک بردار آزاد \underline{A} ، برداری است که راستای آن موازی راستای بردار \underline{A} و مقدار آن برابر حاصل ضرب مقدار بردار $|\underline{A}|$ و عدد α است و جهت آن در جهت \underline{A} می‌باشد اگر α مثبت باشد و در جهت عکس \underline{A} می‌باشد اگر α منفی باشد.

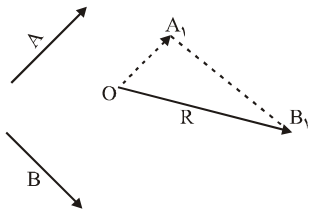
توجه کنید که اندازه بردار \underline{A} مساوی اندازه بردار \underline{A} و در جهت عکس آن \underline{A} است. مانند:



$$\begin{cases} \underline{A} \\ \alpha = -1/5 \\ \alpha = 2/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{A}' = \underline{A} \times (-1/5) \\ \underline{A}'' = \underline{A} \times (2/5) \end{cases}$$

جمع و تفریق بردارها

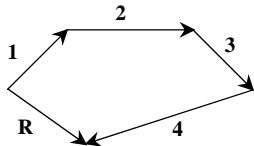
جمع بردارها



«شکل ۴»

جمع بردارهای آزاد طبق قانون مثلث به این ترتیب صورت می‌گیرد که فرض می‌کنیم دو بردار آزاد \underline{A} و \underline{B} داشته باشیم. از نقطه اختیاری O بردار OA_1 همسنگ بردار A و از نقطه A_1 بردار A_1B_1 را همسنگ بردار B رسم می‌کنیم. بنا به تعریف، مجموع دو بردار \underline{A} و \underline{B} بردار $OB_1 = \underline{R}$ می‌باشد لذا: $\underline{A} + \underline{B} = \underline{R}$. ملاحظه می‌شود که:

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{R} = \underline{B} + \underline{A}$$



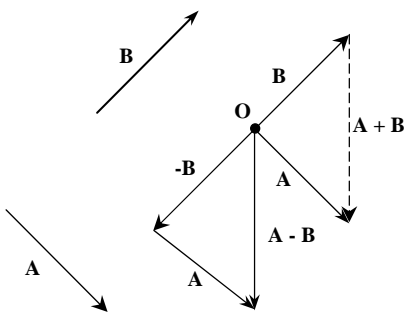
«شکل ۵»

نکته ۳: برای تعمیم تعریف فوق در حل مسائل می‌توان به اختصار گفت برای جمع n بردار باید بردارها را متوالیاً دنبال یکدیگر ترسیم کرده، در این حالت برداری که ابتدای بردار اولی را به انتهای بردار آخری وصل کند بردار مجموع یا بردار برآیند نام دارد، مانند بردار برآیند در شکل «۵».

جمع بردارها از قانون جابه‌جایی‌پذیری پیروی می‌کند. این جمع کردن را می‌توان به بیش از دو بردار نیز تعمیم داد، به این صورت که جمع سه بردار \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} بدین ترتیب قابل انجام است: $\underline{A} + \underline{B} = \underline{R}$; $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{R} + \underline{C}$ و به سادگی ملاحظه می‌شود که:

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = (\underline{A}) + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{C}) + \underline{B}$$

تفریق بردارها

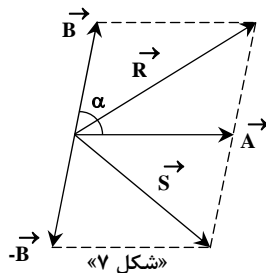


«شکل ۶»

عبارت است از: $\underline{A} - \underline{B} = \underline{A} + (-\underline{B})$ ، یعنی برای تفریق بردار \underline{B} از بردار \underline{A} در واقع بردار $(-1)\underline{B} = -\underline{B}$ را با بردار \underline{A} جمع می‌کنیم. به بیان دیگر: $\underline{C} = \underline{A} - \underline{B}$ به این معنی است که: $\underline{C} + \underline{B} = \underline{A}$ بنابراین: $\underline{OA} - \underline{OB} = \underline{BA}$ توجه کنید که مجموع و تفاضل دو بردار در صفحه آن دو بردار است. همچنین: $\alpha \underline{A} + \beta \underline{A} = (\alpha + \beta) \underline{A}$

نکته ۴: برای جمع دو بردار و پیدا کردن برآیند آنها از قانون کسینوس‌ها در مثلث استفاده می‌شود:

$$|\underline{R}|^2 = |\underline{A}|^2 + |\underline{B}|^2 + 2|\underline{A}||\underline{B}|\cos(A, B)$$



«شکل ۷»

نکته ۵: چنانچه دو بردار \vec{A} و \vec{B} با یکدیگر زاویه α بسازند، اندازه بردار حاصل جمع از رابطه زیر حاصل خواهد شد.

$$|\underline{R}| = |\underline{A} + \underline{B}| = \sqrt{|\underline{A}|^2 + |\underline{B}|^2 + 2|\underline{A}||\underline{B}|\cos\alpha}$$

در این حالت اندازه بردار $\vec{A} - \vec{B}$ برابر است با:

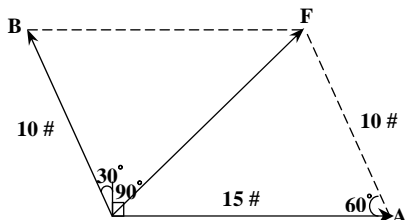
$$|\underline{S}| = |\underline{A} - \underline{B}| = \sqrt{|\underline{A}|^2 + |\underline{B}|^2 - 2|\underline{A}||\underline{B}|\cos\alpha}$$

مثال ۴: جمع دو بردار داده شده در شکل مقابل را پیدا کنید؟

پاسخ: از قانون کسینوسها در مثلث داریم:

$$|\underline{F}|^2 = (15)^2 + (10)^2 - 2(15)(10)\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow |\underline{F}| = 13/\sqrt{2}$$



مثال ۵: سه بردار $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{V}_2 = -2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{V}_3 = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ در نظر است. حاصل $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3)$ کدام است؟

۴) $6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

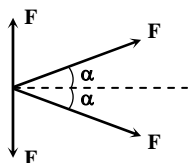
۳) $6\vec{i} - 4\vec{j}$

۲) \vec{k}

۱) ۰

پاسخ: گزینه «۳» جمع و تفریق بردارهای V_1, V_2, V_3 به صورت زیر انجام می‌گردد:

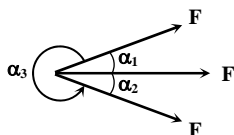
$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3 = (3\vec{i} - \vec{k}) + (-2\vec{j} + \vec{k}) - (-2\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} - 4\vec{j}$$



مثال ۶: شرط آنکه اندازه برآیند چهار نیروی نشان داده شده در شکل برابر یکی از آنها باشد آن است که:

- (۱) $\alpha = 45^\circ$
- (۲) $\alpha = 60^\circ$
- (۳) $\alpha = 90^\circ$
- (۴) $\alpha = 120^\circ$

پاسخ: گزینه «۲» برآیند دو نیروی در یک راستا صفر است. شرط آنکه برآیند دو نیروی مایل برابر یکی از آن دو گردد، آن است که زاویه بین دو نیرو 120° یعنی $\alpha = 60^\circ$ باشد.

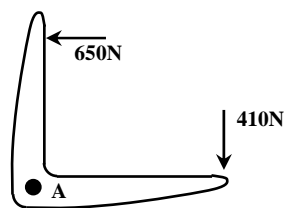


مثال ۷: شرط آنکه برآیند سه نیروی نشان داده شده در شکل صفر باشد، آن است که:

- (۱) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$
- (۲) $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$
- (۳) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$
- (۴) $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$

پاسخ: گزینه «۳» چون سه نیرو هم اندازه‌اند، لذا در صورتی برآیند آنها صفر خواهد شد که شکل برداری آنها تقارن کامل داشته باشد، یعنی:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 120^\circ$$

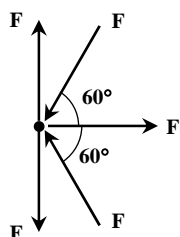


مثال ۸: در اهرم 90° شکل زیر، مقدار نیروی وارد بر محور A کدامست؟

- (۱) 645N
- (۲) $768/5\text{N}$
- (۳) $957/1\text{N}$
- (۴) 1380N

$$R = \sqrt{650^2 + 410^2} = 768/5\text{N}$$

پاسخ: گزینه «۲» نیروی وارد بر محور A برابر است با برآیند دو نیروی وارده، لذا:



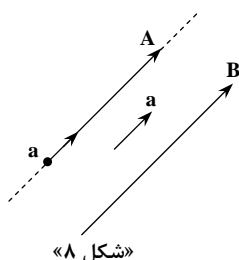
مثال ۹: برآیند بردارهای زیر کدامست؟

- (۱) F
- (۲) $F\sqrt{2}$
- (۳) $F\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» برآیند دو برداری عمودی صفر است. برآیند دو بردار مایل بدلیل زاویه 120° بین آنها، برابر F و در خلاف جهت بردار F افقی موجود خواهد شد، لذا:

$$R = F - F = 0$$

بردار یکه (واحد)



«شکل ۸»

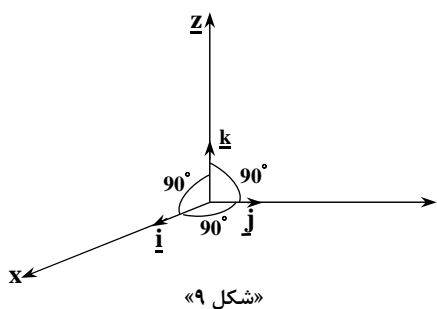
بردار آزاد \underline{A} را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بردار \underline{a} بر راستای بردار \underline{A} قرار گرفته و طول واحد داشته باشد. بردار \underline{a} به بردار یکه یا بردار واحد در جهت بردار \underline{A} معروف است. ملاحظه می‌شود که:

$$\underline{A} = |\underline{A}|\underline{a} \quad \text{یا به طور معادل داریم:} \quad \underline{a} = \frac{\underline{A}}{|\underline{A}|} = \frac{1}{|\underline{A}|} \times \underline{A}$$

می‌توان به صورت حاصل ضرب مقدار آن بردار در بردار واحد در جهت آن نوشت. در این صورت بردار \underline{a} یک بردار آزاد است و می‌توان نوشت:

$$\underline{B} = |\underline{B}|\underline{a}$$

اگر دستگاه مختصات سه بعدی $Oxyz$ را در نظر بگیریم، گویند محوره‌های Ox ، Oy و Oz ، دستگاه مستقیم درست کرده‌اند اگر نحوه استقرار محورها به گونه‌ای باشد که وقتی شخصی روی محور Oz ایستاده و پای او به طرف O و سرش به طرف جهت مثبت محور Z باشد حرکت محور X به طرف محور Y از طرف زاویه کوچکتر از 180° در جهت مثلثاتی (خلاف عقربه‌های ساعت) باشد. در غیر این صورت دستگاه معکوس است. در محاسبات معمولاً از سیستم محوره‌ای مختصات مستقیم استفاده خواهد شد. بردار یکه در جهت X به \underline{i} ، در جهت Y به \underline{j} و در جهت Z به \underline{k} ، نمایش داده خواهند شد.

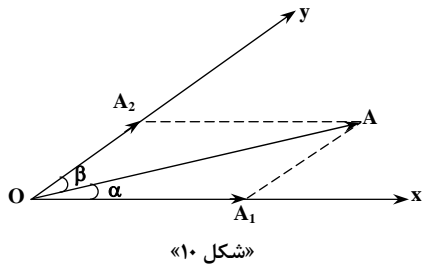


«شکل ۹»

تجزیه یک بردار به مؤلفه‌ها

عمل عکس جمع کردن بردارها را تجزیه می‌نامیم.

تجزیه یک بردار به دو مؤلفه

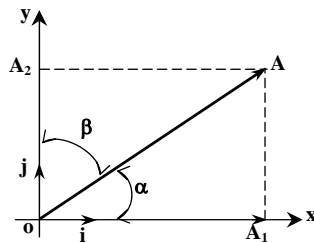


«شکل ۱۰»

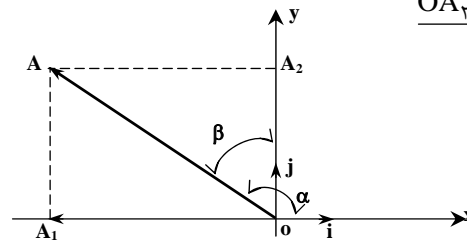
فرض کنیم بردار \underline{A} و دو خط مشخص و متقاطع OX و OY داده شده باشد، به گونه‌ای که بردار \underline{A} در صفحه oxy قرار داشته باشد، از محل تقاطع دو خط OX و OY (نقطه O در شکل مقابل) برداری همسنگ بردار \underline{A} رسم می‌کنیم.

توجه کنید که چون بردار \underline{A} و خطوط OX و OY داده شده‌اند، زاویه بین بردار و محور OX (زاویه) مشخص است. از نقطه A (انتهای بردار \underline{A}) خطوطی به موازات OX و OY رسم می‌کنیم تا به ترتیب OY و OX را در نقاط A_2 و A_1 قطع کنند. ملاحظه می‌شود که: $\underline{A} = \underline{OA_1} + \underline{OA_2}$ ، بنابراین بردار \underline{A} در دو جهت داده شده OX و OY تجزیه شده است. در صورتیکه خطوط x و y موازی و با امتداد \underline{A} متقاطع باشند این تجزیه امکان ندارد و در صورتیکه هر سه خط موازی باشند مسئله بینهایت جواب دارد. اکنون از راه مثلثات می‌توان مقدار و یا طول هر یک از بردارهای $\underline{OA_1}$ و $\underline{OA_2}$ را پیدا کرد. اگر دو محور OX و OY برهم عمود باشند، $\underline{OA_1}$ و $\underline{OA_2}$ را مؤلفه یا تصویرهای برداری قائم می‌نامند، اگر بردارهای یک محوره‌ای مذکور به ترتیب \underline{i} و \underline{j} باشند، داریم: $\underline{OA_1} = |\underline{A}| \cos \alpha \underline{i}$ و $\underline{OA_2} = |\underline{A}| \sin \alpha \underline{j}$ یا

$$\underline{OA_2} = |\underline{A}| \cos \beta \underline{j}$$



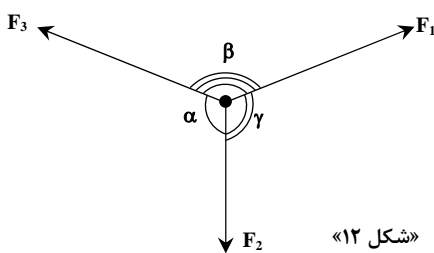
«شکل ۱۱»



به علاوه: $\cos(\underline{A}, x) = \cos \alpha = l$ و $\cos(\underline{A}, y) = \cos \beta = m$ به کسینوس‌های هادی بردار \underline{A} موسومند. ملاحظه می‌شود که: $\underline{A} = y \underline{j}$. همچنین اگر مختصات نقطه $A(x, y)$ باشد: $\underline{OA_1} = x \underline{i}$ ، $\underline{OA_2} = y \underline{j}$ ؛ لذا: $\underline{A} = x \underline{i} + y \underline{j}$. در صورتیکه \underline{A} موازی محور OY باشد $A = y \underline{j}$ و در صورتیکه \underline{A} موازی محور OX باشد $\underline{A} = x \underline{i}$ می‌باشد.

نکته ۶: برای حل مسائل سه بعدی که در آن ۱ یا ۲ مؤلفه اصلی مجهول است می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



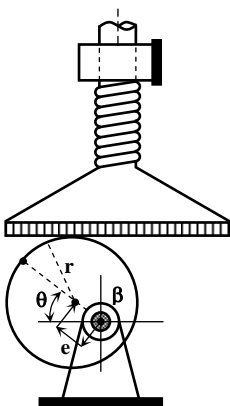
«شکل ۱۲»

یعنی مجموع مربع کامل تمامی کسینوس‌های هادی، مساوی با ۱ است.

نکته ۷: زمانی که سه نیرو در یک نقطه متقاطع باشند، قانون سینوس‌ها به صورت مقابل استفاده می‌شود:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$

صورت مقابل استفاده می‌شود:



مثال ۱۰: یک بادامک گرد با خروج از مرکز ($e = 20 \text{ mm}$) و شعاع ($r = 40 \text{ mm}$) مفروض است. برای موقعیت $\theta = 30^\circ$ سطح زیرین سوپاپ در نقطه تماس با بادامک نیروی عمودی $F = 400 \text{ N}$ رو به پایین بر آن وارد می‌کند. مؤلفه این نیرو در جهت خط واصل محل تماس به مرکز محور دوران بادامک کدام است؟

۳۷۳ N (۱)

۳۷۸ N (۲)

۲۹۵ N (۳)

۲۹۸ N (۴)



✓ پاسخ: گزینه «۲» نیروی مورد نظر در امتداد خط AB قرار دارد. در مثلث OAB داریم:

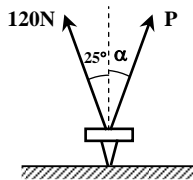
$$OA = r = 40 \text{ mm} \quad OB = e = 20 \text{ mm}$$

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB)\cos\alpha} = 52/92 \text{ mm} \quad \text{از قانون کسینوسها داریم:}$$

$$\frac{OB}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\beta = \frac{OB}{OA}\sin\alpha \Rightarrow \beta = 19/09^\circ \quad \text{از قانون سینوسها داریم:}$$

$$F' = F\cos\beta = 400\cos 19/09^\circ = 378 \text{ N}$$

✎ مثال ۱۱: اگر برآیند وارده بر میخ نشان داده شده در امتداد عمود باشد، مطلوبست مقدار زاویه α که به ازاء آن، نیروی P حداقل باشد؟



(۱) 3°

(۲) 6°

(۳) 9°

(۴) هیچکدام

✓ پاسخ: گزینه «۳» در صورتی که برآیند دو نیروی P و 120° نیوتنی در امتداد عمود باشد، پس مولفه افقی برآیند صفر است. لذا:

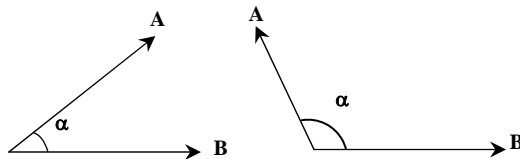
$$P\sin\alpha = 120\sin 25^\circ \Rightarrow P \times \sin\alpha = \text{عدد ثابت}$$

برای اینکه P حداقل مقدار ممکن باشد، باید $\sin\alpha$ حداکثر مقدار را داشته باشد که در ازاء $\alpha = 90^\circ$ اتفاق می افتد.

حاصلضرب داخلی (جبری یا عددی) دو بردار

تاکنون عمل جمع دو بردار را تعریف کرده ایم. حال یک نوع ترکیب به نام ضرب داخلی (عددی یا جبری) را برای دو بردار تعریف می کنیم. بنا به تعریف، ضرب داخلی دو بردار \underline{A} و \underline{B} به صورت $\underline{A} \cdot \underline{B}$ نمایش داده شده و نتیجه آن عددی جبری است که مقدار آن برابر حاصلضرب مقدار دو بردار در کسینوس زاویهٔ کوچک بین دو بردار است، یعنی:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |\underline{A}||\underline{B}|\cos\alpha$$



شکل ۱۳

ملاحظه می شود که این عدد جبری ممکن است مثبت، منفی و یا صفر باشد، بسته به این که زاویه α کمتر، بیشتر و یا مساوی 90° باشد، بنابراین:

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1, \quad \underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{j} = 0$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$$

به علاوه، ضرب داخلی دو بردار جابجایی پذیر است:

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$$

رابطه روبرو در ضرب داخلی بردارها صادق است:

فرض کنید بردارهای \underline{A} و \underline{B} به صورت‌های: $\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$, $\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$ داده شده باشند، در اینصورت ضرب داخلی دو بردار \underline{A} و \underline{B} بر حسب مولفه‌ها به صورت: $\underline{A} \cdot \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ تعریف می گردد. بنابراین:

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = |\underline{A}||\underline{A}|\cos(0) = |\underline{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \Leftrightarrow \underline{A} \perp \underline{B}$$

اگر دو بردار غیر صفر \underline{A} و \underline{B} بر هم عمود باشند: $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$ و بالعکس یعنی:

✎ مثال ۱۲: بردارهای $\underline{L} = 2\underline{i} - 3\underline{j} + 6\underline{k}$ و $\underline{A} = 3\underline{i} + 5\underline{j} + 6\underline{k}$ داده شده اند، تصویر جبری بردار \underline{A} در جهت \underline{L} ، کدام است؟

(۴) $\frac{27}{7}$

(۳) $\frac{18}{7}$

(۲) ۷

(۱) $\frac{20}{7}$

✓ پاسخ: گزینه «۴» برای تعیین تصویر جبری بردار \underline{A} روی بردار \underline{L} بایستی حاصلضرب داخلی $\underline{A} \cdot \frac{\underline{L}}{|\underline{L}|}$ را بدست آورد:

$$\underline{A} \cdot \frac{\underline{L}}{|\underline{L}|} = A_x L_x + A_y L_y + A_z L_z = 3\left(\frac{2}{7}\right) + 5\left(\frac{-3}{7}\right) + 6\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{27}{7}$$

* تذکر ۱: برای تصویر کردن بردار \underline{A} به روی بردار \underline{L} باید بردار \underline{L} را به دست آورد، سپس ضرب داخلی انجام گردد، یعنی خواهیم داشت:

$$\underline{A} \cdot \underline{nB} = \text{تصویر بردار } \underline{A} \text{ در } \underline{B} \quad \text{و} \quad \underline{B} \cdot \underline{nA} = \text{تصویر بردار } \underline{B} \text{ در } \underline{A}$$

(در روابط بالا، \underline{nA} بردار یکه \underline{A} و \underline{nB} بردار یکه \underline{B} می باشد).

حاصلضرب خارجی (برداری) دو بردار

بنا به تعریف، حاصلضرب خارجی دو بردار \underline{A} و \underline{B} بردار سومی است که به صورت $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$ نشان داده می‌شود. اندازه بردار \underline{C} ، $|\underline{A}||\underline{B}|\sin \alpha$ می‌باشد با این شرط که α کوچکترین زاویه بین \underline{A} و \underline{B} باشد. (همواره $\sin \alpha \geq 0$). راستای بردار \underline{C} به گونه‌ای است که همواره بر صفحه‌ای که دو بردار \underline{A} و \underline{B} تشکیل می‌دهند، عمود است.

روابط زیر برای ضرب خارجی بردارها قابل استفاده می‌باشند:

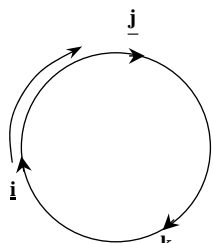
$$\begin{aligned} \underline{A} \times \underline{B} &= -\underline{B} \times \underline{A} \\ \underline{A} \times (\underline{B} + \underline{C}) &= \underline{A} \times \underline{B} + \underline{A} \times \underline{C} \\ m\underline{A} \times n\underline{B} &= mn(\underline{A} \times \underline{B}) \end{aligned}$$

با توجه به تعریف ضرب خارجی دو بردار ملاحظه می‌شود که دو بردار موازی و غیر صفر ($\alpha = 0$) دارای حاصلضرب خارجی صفر هستند، پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\underline{A} \times \underline{B} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{A} \parallel \underline{B}$$

حاصلضرب خارجی یک بردار در خود آن بردار صفر است. همینطور ملاحظه می‌گردد که:

$$\begin{aligned} \underline{i} \times \underline{j} &= \underline{k} & \underline{j} \times \underline{k} &= \underline{i} & \underline{k} \times \underline{i} &= \underline{j} \\ \underline{j} \times \underline{i} &= -\underline{k} & \underline{k} \times \underline{j} &= -\underline{i} & \underline{i} \times \underline{k} &= -\underline{j} \\ \underline{i} \times \underline{i} &= \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} &= \underline{0} \end{aligned}$$



یک روش ساده برای به خاطر سپردن این حاصلضربها این است که یک دایره انتخاب و به ترتیب در جهت منفی مثلثاتی حروف \underline{i} ، \underline{j} و \underline{k} را قرار می‌دهیم. حال برای تعیین حاصلضرب هر دو بردار دلخواه اگر همینطور که از چپ به راست بردارها را ضرب می‌کنیم در جهت مثلثاتی دایره حرکت کنیم حاصلضرب بردار سوم با علامت منفی و اگر در جهت خلاف مثلثاتی حرکت کنیم همان بردار (بردار سوم) با علامت مثبت به دست می‌آید.

بعنوان مثال: $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$ (جهت منفی) - (خلاف جهت مثلثاتی) $\underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$ (جهت منفی) - (در جهت مثلثاتی)

مؤلفه‌های بردار حاصلضرب خارجی بر حسب مؤلفه‌ها به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k} & \underline{B} &= B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k} \\ \underline{A} \times \underline{B} &= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \times (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}) \\ &= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \times B_x \underline{i} + (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \times B_y \underline{j} + (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \times B_z \underline{k} \end{aligned}$$

برای به خاطر سپردن این حاصلضرب می‌توان از این دترمینان استفاده کرد:

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \underline{k}$$

مثال ۱۳: بردارهای $\underline{A} = (2, 3, 5)$ و $\underline{B} = (1, 0, -1)$ مفروضند. مؤلفه طولی بردار حاصلضرب خارجی \underline{A} و \underline{B} کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) -۳ ۳) -۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» حل: طبق تعریف مؤلفه‌های ضرب خارجی دو بردار، مؤلفه طولی $\underline{A} \times \underline{B}$ عبارت است از:

$$A_y B_z - A_z B_y = (3 \times -1) - (5 \times 0) = -3$$

مثال ۱۴: اندازه حاصلضرب خارجی و داخلی بردار یک \underline{V} در قرینه‌اش به ترتیب (از راست به چپ) کدام است؟

- ۱) ۰ و -۱ ۲) ۰ و ۱ ۳) -۱ و ۰ ۴) ۱ و ۰

پاسخ: گزینه «۱» قرینه بردار \underline{V} برابر $-\underline{V}$ می‌باشد، لذا:

$$\underline{V} \times (-\underline{V}) = \underline{0} \quad \underline{V} \cdot (-\underline{V}) = -1$$

مثال ۱۵: کدام گزینه برابر عبارت $\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C})$ است؟

- ۱) $(\underline{A} \times \underline{C}) \cdot \underline{B}$ ۲) $\underline{B} \cdot (\underline{A} \times \underline{C})$ ۳) $(\underline{B} \times \underline{A}) \cdot \underline{C}$ ۴) $(-\underline{B} \times \underline{A}) \cdot \underline{C}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از ویژگی حاصلضرب مختلط بردارها داریم:

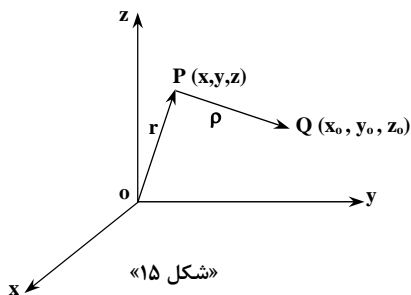
$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{C} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = (\underline{A} \times \underline{B}) \cdot \underline{C} = (-\underline{B} \times \underline{A}) \cdot \underline{C}$$

چند بردار خاص

الف) بردار مکان

نقطه P با مختصات (x, y, z) را در دستگاه مستقیم XYZ در نظر می‌گیریم. برداری که از نقطه O (مرکز مختصات) به نقطه P وصل شود و جهت آن از O به P باشد، بردار مکان نقطه P نامیده می‌شود:

$$\underline{OP} = \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$



اگر نقطه دیگری از فضای نامبرده شده باشد، بردار PQ به بردار تغییر مکان از نقطه P به Q موسوم است.

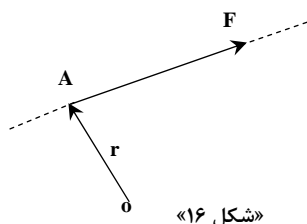
$$\underline{PQ} = \underline{\rho} = \underline{OQ} - \underline{OP} = \underline{r}_q - \underline{r}_p = x_0\underline{i} + y_0\underline{j} + z_0\underline{k} - x\underline{i} - y\underline{j} - z\underline{k}$$

$$\underline{\rho} = (x_0 - x)\underline{i} + (y_0 - y)\underline{j} + (z_0 - z)\underline{k}$$

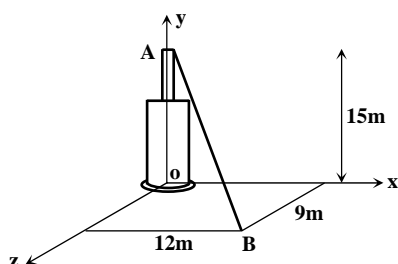
ب) لنگر یک بردار نسبت به یک نقطه

بردار لغزان \underline{r} و نقطه O را در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف لنگر بردار \underline{F} نسبت به نقطه O به صورت $\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F}$ تعریف می‌گردد، که در آن برداری است که از O به A واقع بر راستای نیروی (F) وصل می‌گردد. رابطه فوق طبق تعریف ضرب خارجی چنین است: $M_o = rF \sin \alpha$ که

$$|M_o| = r \times F : \alpha = 90^\circ \text{ داریم}$$



مثال ۱۶: نیروی کششی T با اندازه ۱۰ KN به کابلی که متصل به (A) یک میله پرچم صلب است، وارد می‌شود. گشتاور نیروی T حول محور Z ها کدام است:



۴۲/۴ (۱)

۵۶/۶ (۲)

۷۰/۷ (۳)

۸۴/۹ (۴)

$$|\underline{AB}| = \sqrt{9^2 + 15^2 + 12^2} = \sqrt{450} = 21/2 \text{ m}$$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا اندازه بردار فاصله را محاسبه می‌کنیم:

$$\underline{T} = 10 \left(\frac{12}{21/2} \underline{i} - \frac{15}{21/2} \underline{j} + \frac{9}{21/2} \underline{k} \right) = 10 \left(0/566 \underline{i} - 0/707 \underline{j} + 0/424 \underline{k} \right)$$

$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{T} = 15 \underline{j} \times 10 \left(0/566 \underline{i} - 0/707 \underline{j} + 0/424 \underline{k} \right) = 150 \left(0/566 \underline{k} + 0/424 \underline{i} \right) \Rightarrow M_z = 150 \times 0/566 = 84/9$$

(مولفه گشتاور در امتداد محور Z ها)

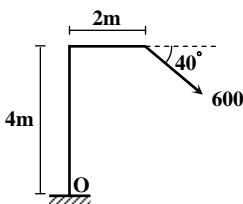
مثال ۱۷: گشتاور نیروی ۶۰۰ نیوتنی نسبت به نقطه O کدام است؟

۱۲۰۰۰ N.m (۲)

۲۴۰۰ N.m (۱)

۱۸۴۰ N.m (۴)

۲۶۱۰ N.m (۳)



پاسخ: گزینه «۳» نیرو را به مولفه‌های افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم، لذا داریم:

$$M_O = (600 \sin 40^\circ \times 2) + (600 \cos 40^\circ \times 4)$$

$$= 771/35 + 1838/5 = 2609/8 \approx 2610$$

مثال ۱۸: گشتاور حاصل از دو نیروی نشان داده شده در نقطه A چند نیوتن متر است؟

۲۹۲/۸۲ (۱)

۱۰۲/۴۱ (۲)

۷۹/۶۳ (۳)

۵۳/۵۹ (۴)

