درسنامه + آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

موج آزمون هندسه

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی

رشته ریاضی

ویژه نظام جدید آموزشی

نشرالگو

پیش گفتار

سال‌هاست که در کشور ما اصلی‌ترین راه ورود به دانشگاه، قبولی در کنکور سراسری است. آزمونی که ویژگی اصلی‌اش چهارگزینه‌ای بودن پرسش‌هاســت، و البته دشواریش بیشتر به دلیل کوتاه بودن زمان پاسخ‌گویی است تا دشواری سؤال‌ها. از این‌رو، رویکرد آموزشــی بســیاری از معلمان، به ویژه در ســال‌های پایانی دورهٔ متوســطه، تدریس مطالب درسی بر پایهٔ پرســش‌های چهارگزینه‌ای اســت. با این همه، هر چند که بعید است شــما پیش از سال دوازدهم تحصیل‌تان با پرسش‌های چهارگزینه‌ای دست و پنجه نرم نکرده باشید، اگر قصد ورود به دانشگاه را دارید، گریزی از آن نیست!

نشــر الگو، برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوســطه، در هر پایه و برای هر درس ریاضی، **کتاب ســه‌بعدی** شــامل درسنامهٔ مفصل، تمرین‌های تشریحی و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و **کتاب تست** شامل درسنامهٔ خلاصه و پرسش‌های چهارگزینه‌ای منتشــر کرده اســت. معلوم است که تعداد پرسش‌های چهارگزینه‌ای کتاب‌های تست، نسبت به کتاب‌های سه‌بعدی بسیار بیشتر است.

کتاب‌های **موج‌آزمون** ویژهٔ آمادگی برای کنکور سراسری است. کتابی که در دست دارید، مربوط به درس‌های هندسهٔ ۱، هندسهٔ ۲ و هندسهٔ ۳ است.

در ابتــدای هــر فصل، همــهٔ مطالبی را که برای حل کردن پرســش‌های آن فصل باید بدانید آورده‌ایــم. پس از آن، نوبت آزمون‌هاســت. در هر آزمون، ده پرســش مربوط به همان مبحث را آورده‌ایم. توجه کنید که ممکن است تعداد آزمون‌های یک مبحث، بیش از یکی باشد. در انتهای هر فصل، یک یا چند آزمون جامع مربوط به مباحث همان فصل را آورده‌ایم. در فصل (۱۵) هم هشت آزمون جامع از همهٔ مباحث آورده‌ایم که هر کدام پانزده پرسش دارد. چون تلاش کرده‌ایم که تمام نکات مهم مباحث کتاب‌های درسی را در آزمون‌ها بگنجانیم، توصیه می‌کنیم که تمام آزمون‌ها را پاسخ دهید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشــر الگو، خانم‌ها عاطفه ربیعی و مهدیه جمشــیدی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم نســیم نوریان برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از خانم فهیمه گودرزی و آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

فهرست

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل دوم: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل سوم: چندضلعی‌ها

فصل چهارم: تجسم فضایی

فصل پنجم: آزمون‌های جامع هندسهٔ ۱

فصل ششم: دایره

۱۱

ماتریس و کاربردها

فصل ۱۱ ماتریس و کاربردها

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

- هر آرایش مستطیلی از عددهای حقیقی یک **ماتریس** است.
- هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس، **درایهٔ** آن ماتریس است.
- درایه‌های ماتریس را با دو کروشه محصور می‌کنیم و خود ماتریس را با حروف بزرگ لاتین نشان می‌دهیم.
- ماتریسی که m سطر و n ستون دارد، از مرتبهٔ $m\times n$ (بخوانید m در n) است.
- در حالت کلی درایهٔ سطر iام و ستون jام ماتریس A را با a_{ij} نشان می‌دهیم.
- در حالت کلی، ماتریس $m\times n$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

این ماتریس را به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم $(۱\le i\le m\,,۱\le j\le n)$.

- a_{ij} **درایهٔ عمومی** ماتریس A است.

معرفی چند ماتریس خاص

۱) ماتریس صفر ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر است. ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

$$\bar{O}=[\,۰\,]_{۱\times۱}\quad,\quad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

۲) ماتریس سطری ماتریسی است که فقط یک سطر دارد. ماتریس سطری در حالت کلی از مرتبهٔ $۱\times n$ است.

$$A=[\,-۱\,]\;,\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۳) ماتریس ستونی ماتریسی است که فقط یک ستون دارد. ماتریس ستونی در حالت کلی از مرتبهٔ $m\times۱$ است.

$$A=[\,۳\,]\;,\quad B=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

۴) ماتریس مربعی ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند.

$$A=[\,-۴\,]_{۱\times۱}\quad,\quad B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

- ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n\times n$ را ماتریس مربعی از مرتبهٔ n می‌گوییم.
- در حالت کلی برای ماتریس‌های مربعی درایه‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A=[a_{ij}]_{n\times n}\begin{cases} i=j & \text{روی قطر اصلی است. } a_{ij} \\ i<j & \text{بالای قطر اصلی است. } a_{ij} \\ i>j & \text{پایین قطر اصلی است. } a_{ij} \end{cases}$$

۵) ماتریس قطری ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر است.

توجه کنید که درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

۶) ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

$$A=\begin{bmatrix} ۵ \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۷) ماتریس همانی (واحد) ماتریسی اسکالر است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ هستند. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نشان می‌دهیم.

$$I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

دو ماتریس $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ مساوی هستند، هرگاه

۱) هم‌مرتبه باشند.

۲) درایه‌های نظیر آن‌ها با هم برابر باشند. به عبارت دیگر،

$$\forall i, j; a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

برای جمع دو ماتریس هم‌مرتبه، باید درایه‌های نظیر در این دو ماتریس را با هم جمع کرد. به عبارت دیگر،

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \ , \ B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$$

- برای تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه مانند جمع عمل می‌کنیم:

$$A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]$$

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس، کافی است آن عدد را در تک‌تک درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم. به عبارت دیگر،

$$\begin{cases} r\in\mathbb{R} \\ A=[a_{ij}]_{m\times n} \end{cases} \Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

از ضرب عدد -۱ در ماتریس A **قرینهٔ** ماتریس A به دست می‌آید:

$$\text{قرینهٔ ماتریس } A=(-۱)A=-A=[-a_{ij}]$$

فرض کنید A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند. در این صورت خواص زیر برقرارند:

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی برای عمل جمع)

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۷) $(rs)A=r(sA)$

۸) $۱A=A$

۹) $۰A=\bar{O}$ و $r\bar{O}=\bar{O}$.

۱۰) اگر $rA=rB$ و $r\neq ۰$، آن‌گاه $A=B$.

۱۱) اگر $A=B$، آن‌گاه $rA=rB$.

ضرب A در B (AB) زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد. به عبارت دیگر، اگر A از مرتبهٔ $m\times n$ و B از مرتبهٔ $n\times p$ باشد، این ضرب قابل تعریف و حاصل آن ماتریسی از مرتبهٔ $m\times p$ است.

$$A_{m\times \underbrace{n B_{n}}_{\text{حذف شود}}\times p}=C_{m\times p}$$

اگر A ماتریس سطری $1\times n$ و B ماتریس ستونی $n\times 1$ باشد، ضرب A در B ماتریسی 1×1 است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1}\end{bmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}$$

می‌توان برابری بالا را به شکل $AB=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}$ هم نشان داد.

از ضرب ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ در ماتریس $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ماتریسی مانند C به دست می‌آید که از مرتبهٔ $m\times p$ است. درایهٔ عمومی این ماتریس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_{m\times p}=A_{m\times n}\times B_{n\times p}$$

$$\text{درایهٔ عمومی ماتریس } C=c_{ij}=(\text{سطر } i \text{ام } A)(\text{ستون } j \text{ام } B)=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj}\end{bmatrix}$$

$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

در ضرب ماتریس‌ها،

۱) جابه‌جایی برقرار نیست. یعنی در حالت کلی **نمی‌توان** گفت $AB=BA$.

۲) شرکت‌پذیری برقرار است:

$$A(BC)=(AB)C$$

- اگر $ABC=D=[d_{ij}]$، آن‌گاه

$$d_{ij}=(\text{سطر } i \text{ام } A)B(\text{ستون } j \text{ام } C)$$

۳) توزیع‌پذیری برقرار است:

$$\begin{cases} A(B+C)=AB+AC \\ (B+C)A=BA+CA \end{cases}$$

۴) عضو خنثی ضرب داریم:

$$A_{n\times n}I_n=I_nA_{n\times n}=A_{n\times n}$$
$$A_{m\times n}I_n=I_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$$

۵) فاکتورگیری داریم:

$$AB+AC=A(B+C)$$
$$AC+BC=(A+B)C$$

$$\underbrace{A\,B}_{\text{B از راست ضرب شده}}+\underbrace{B\,C}_{\text{B از چپ ضرب شده}}$$

(در این عبارت نمی‌توان از B فاکتور گرفت)

$$AB+2A=A(B+2I)$$
$$BA+3A=(B+3I)A$$

۶) برای ماتریس‌های A، B و C نمی‌توان از تساوی $AB=AC$ نتیجه گرفت $B=C$.

- عکس این ویژگی برقرار است. یعنی اگر $A=B$، می‌توان دو طرف را در ماتریسی مانند C ضرب کرد. فقط دقت کنید که جهت ضرب مهم است.

$$A=B \begin{cases} \xrightarrow{C\times} CA=CB \\ \xrightarrow[\times C]{} AC=BC \end{cases}$$

۷) برای دو ماتریس A و B نمی‌توان از تساوی $AB=\bar{O}$ نتیجه گرفت $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$.

$$AB=\bar{O} \not\Rightarrow A=\bar{O} \text{ یا } B=\bar{O}$$

- عکس این مطلب درست است، یعنی

$$A=\bar{O} \text{ یا } B=\bar{O} \Rightarrow AB=\bar{O}$$

۸) حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، ماتریس قطری است.

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & ۰ & ۰ \\ ۰ & b' & ۰ \\ ۰ & ۰ & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa' & ۰ & ۰ \\ ۰ & bb' & ۰ \\ ۰ & ۰ & cc' \end{bmatrix}$$

- اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$$

- اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه

$$A^{۲}=(a+d)A-(ad-bc)I$$

- در حالت کلی اتحادهای جبری در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست. به عنوان نمونه:

$$\begin{cases} (A+B)^{۲} \neq A^{۲}+۲AB+B^{۲} \\ (A+B)^{۲}=(A+B)(A+B)=A^{۲}+AB+BA+B^{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A+B)(A-B) \neq A^{۲}-B^{۲} \\ (A+B)(A-B)=A^{۲}-AB+BA-B^{۲} \end{cases}$$

- اگر دو ماتریس A و B جابه‌جا شونده باشند $(AB=BA)$، آن‌گاه اتحادها برای آن‌ها برقرار است:

$$AB=BA \Rightarrow \begin{cases} (A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲} \\ (A-B)^{۲}=A^{۲}-۲AB+B^{۲} \\ (A-B)(A+B)=A^{۲}-B^{۲} \end{cases}$$

- چون $AI=IA$، پس اتحادها برای I با هر ماتریس هم مرتبه‌اش برقرار است:

$$(A+I)^{۲}=A^{۲}+۲A+I$$

$$(A+I)^{۳}=A^{۳}+۳A^{۲}+۳A+I$$

$$(A+I)(A-I)=A^{۲}-I$$

$$(A+I)(A^{۲}-A+I)=A^{۳}+I$$

وارون ماتریس و دترمینان

- دترمینان هر ماتریس مربعی مرتبهٔ ۱ همان درایه‌اش است:

$$A=[a]\Rightarrow |A|=a$$

- برای ماتریس مربعی $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، دترمینان به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|A|=\underbrace{ad}_{\text{حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی}}-\underbrace{bc}_{\text{حاصل‌ضرب درایه‌های قطر فرعی}}$$

- برای ماتریس مربعی A، ماتریسی را که از حذف سطر i ام و ستون j ام به‌دست می‌آید با M_{ij} نشان می‌دهیم.

- برای ماتریس مربعی A می‌نویسیم $A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$. به A_{ij} **همسازهٔ** نظیر درایهٔ a_{ij} می‌گوییم (توجه کنید که نام A_{ij} در کتاب درسی مطرح نشده است).

- برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ کافی است یک سطر یا یک ستون دلخواه را انتخاب کنیم، سپس هر درایه از آن سطر یا ستون را در همسازه‌اش ضرب کنیم و در نهایت آن‌ها را با هم جمع کنیم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \quad \text{بسط نسبت به سطر اول}$$

$$=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \quad \text{بسط نسبت به سطر دوم}$$

$$=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \quad \text{بسط نسبت به سطر سوم}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \quad \text{بسط نسبت به ستون اول}$$

$$=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32} \quad \text{بسط نسبت به ستون دوم}$$

$$=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33} \quad \text{بسط نسبت به ستون سوم}$$

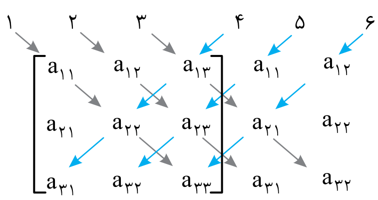
- برای محاسبهٔ دترمینان بهتر است سطر یا ستونی را انتخاب کنیم که درایه‌های صفر بیشتری داشته باشد.

- اگر همهٔ درایه‌های یک سطر (ستون) ماتریس مربعی مانند A برابر صفر باشند، آن‌گاه $|A|=0$.

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳

- ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ستون‌های اول و دوم این ماتریس را به صورت زیر در کنارش می‌نویسیم. در این صورت

$$|A|=(\underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\text{ضرب درایه‌های خط ۱}}+\underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{\text{ضرب درایه‌های خط ۲}}+\underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{\text{ضرب درایه‌های خط ۳}})-(\underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{\text{ضرب درایه‌های خط ۴}}+\underbrace{a_{11}a_{23}a_{32}}_{\text{ضرب درایه‌های خط ۵}}+\underbrace{a_{12}a_{21}a_{33}}_{\text{ضرب درایه‌های خط ۶}})$$



- روش ساروس فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است.

ویژگی‌های دترمینان

ویژگی ۱ (ضرب عدد در دترمینان) برای ضرب یک عدد در یک دترمینان کافی است آن عدد را فقط در یک سطر یا یک ستون دلخواه ضرب کنیم.

$$\alpha\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & \alpha b & c \\ d & \alpha e & f \\ g & \alpha h & i \end{vmatrix}=\cdots$$

این ویژگی نشان می‌دهد که می‌توان از یک سطر یا یک ستون دترمینان ماتریس، عددی مانند α را فاکتور گرفت.

اگر A ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشد و α عددی حقیقی باشد، آن‌گاه $|\alpha A|=\alpha^n|A|$.

ویژگی ۲ برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه می‌نویسیم $|AB|=|A||B|$.

اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $|A^n|=|A|^n$.

ویژگی ۳ در یک ماتریس مربعی، اگر همهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی یا همهٔ درایه‌های پایین قطر اصلی صفر باشند، حاصل دترمینان برابر ضرب درایه‌های قطر اصلی است.

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{vmatrix}=abc\ ,\quad \begin{vmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix}=abc\ ,\quad \begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix}=abc$$

- دترمینان ماتریس همانی برابر ۱ است: $|I|=۱$.

ویژگی ۴ اگر در یک ماتریس مربعی، دو سطر یا دو ستون، مضرب هم باشند، حاصل دترمینان این ماتریس صفر است.

اگر در یک ماتریس مربعی، دو سطر یا دو ستون با هم برابر باشند، حاصل دترمینان این ماتریس صفر است.

برای ماتریس مربعی A اگر ماتریسی مانند B وجود داشته باشد که $AB=BA=I$، آن‌گاه A وارون‌پذیر است و B وارون A است.

اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، وارون A منحصر به فرد است.

وارون ماتریس A را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم: $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$.

وارونِ وارونِ هر ماتریس، خودش می‌شود: $(A^{-۱})^{-۱}=A$.

اگر A ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $|A|\neq ۰$ و برعکس. یعنی اگر $|A|\neq ۰$، آن‌گاه A وارون‌پذیر است.

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد و B و C دو ماتریس دلخواه باشند، آن‌گاه با فرض $AB=AC$ نتیجه می‌گیریم $B=C$.

اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد و $AB=\bar{O}$، آن‌گاه $B=\bar{O}$.

ویژگی‌های ماتریس وارون

ویژگی ۱ اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$.

ویژگی ۲ اگر k عددی حقیقی و مخالف صفر و A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $(kA)^{-۱}=\frac{۱}{k}A^{-۱}$.

ویژگی ۳ برای دو ماتریس وارون‌پذیر و هم‌مرتبهٔ A و B می‌نویسیم $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$.

- این ویژگی قابل تعمیم است:

$$(A_۱A_۲\ldots A_n)^{-۱}=A_n^{-۱}\ldots A_۲^{-۱}A_۱^{-۱}$$

برای ماتریس مربعی و وارون‌پذیر A، $(A^n)^{-۱}=(A^{-۱})^n$.

دقت کنید که $(A+B)^{-۱}\neq A^{-۱}+B^{-۱}$.

برای ماتریس وارون‌پذیر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

اگر P ماتریسی وارون‌پذیر و A ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ آن باشد، آن‌گاه $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$.

حل دستگاه دو معادله و دو مجهول خطی

روش اول (روش تبدیل) در این روش، در یکی از معادلات یکی از مجهول‌ها را برحسب مجهول دیگر به‌دست می‌آوریم. مجهول به‌دست آمده را در معادلهٔ دیگر قرار می‌دهیم تا مقدار یکی از مجهول‌ها به‌دست آید. با قرار دادن مقدار مجهول به‌دست آمده در یکی از معادلات مقدار مجهول دیگر به‌دست می‌آید.

روش دوم (روش حذف) در این روش معادلات را در عددهایی مخالف صفر ضرب می‌کنیم به طوری که با جمع و یا تفریق دو معادله، یکی از مجهول‌ها حذف شود. از معادلهٔ یک مجهولی حاصل، مقدار یکی از مجهول‌ها به‌دست می‌آید. با قرار دادن آن در یکی از معادله‌ها، مقدار مجهول دیگر به‌دست می‌آید.

روش سوم (روش ماتریس وارون) برای دستگاه زیر سه ماتریس تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} ,\quad \text{ماتریس ضرایب}: A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} ,\quad \text{ماتریس مجهولات}: X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ,\quad \text{ماتریس مقادیر معلوم}: B=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

دستگاه بالا را می‌توان به شکل ماتریسی زیر در نظر گرفت:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \text{ یا } AX=B$$

با حل این معادلهٔ ماتریسی، دستگاه حل می‌شود. واضح است که به شرط وارون‌پذیر بودن ماتریس A به‌دست می‌آید $X=A^{-1}B$.

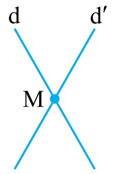
اگر ماتریس ضرایب $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ باشد، می‌توان گفت:

- اگر $|A|\neq ۰$، آن‌گاه دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.
- اگر $|A|=۰$، در این صورت یا دستگاه جواب ندارد یا اینکه دستگاه نامتناهی جواب دارد.

بحث در تعداد جواب‌های یک دستگاه

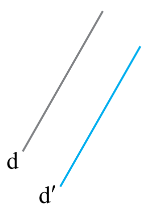
در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ اگر هر معادله را یک خط در نظر بگیریم، به‌دست می‌آید:

۱) اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$، یعنی $|A|\neq ۰$ (A همان ماتریس ضرایب است)، دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ متقاطع هستند و دستگاه فقط یک جواب منحصر به فرد دارد.



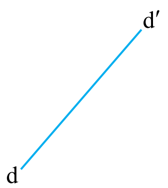
۲) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ موازی و متمایز (غیر منطبق) هستند، در این حالت دستگاه جواب ندارد.

- در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم دستگاه نشدنی یا غیر ممکن است.



۳) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$، دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ بر هم منطبق‌اند. در این حالت دستگاه نامتناهی جواب دارد.

- در این حالت دستگاه معادلات مبهم است.



آزمون ۵۲ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (تا ابتدای ضرب ماتریس‌ها)

پاسخ: ۲۷۴ تا ۲۷۵

۱- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\begin{cases} j-i & i\le j \\ j+i & i>j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ که در آن $b_{ij}=\begin{cases} i+j & i<j \\ i-j & i\ge j \end{cases}$، ماتریس $A+B$ چگونه است؟

۱) درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر مساوی‌اند.

۲) درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر قرینه‌اند.

۳) قطری

۴) اسکالر

۲- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} b & b+۲ \\ ۰ & m^۲+m \end{bmatrix}$ قطری باشد، مجموع مقادیر m چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

۳- مجموع درایه‌های ماتریس $[ij-۳i^۲]_{۳\times۳}$ برابر کدام است؟

۱) ۹۰- ۲) ۹۲- ۳) ۸۸- ۴) ۸۶-

۴- در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases} j-۱ & i<j \\ i+j & i\ge j \end{cases}$، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۵- در کدام ماتریس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر مساوی‌اند؟

۱) $[i-j]_{۳\times۳}$ ۲) $[\cos(i-j)]_{۳\times۳}$ ۳) $[\sin(i-j)]_{۳\times۳}$ ۴) $[i+۲j]_{۳\times۳}$

۶- در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ اگر $a_{ij}=[\frac{i}{j}]$، مجموع درایه‌های ستون دوم چقدر است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- درایهٔ عمومی ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $a_{ij}=i^۲-j$ ۲) $a_{ij}=i-j$ ۳) $a_{ij}=۲i-j$ ۴) $a_{ij}=i-j^۲$

۸- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\begin{cases} [\frac{i+j}{۳}]-۱ & i>j \\ i-j & i\le j \end{cases}$، کدام درایه در ماتریس A وجود <u>ندارد</u>؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۲- ۴) ۲

۹- برای دو ماتریس A و B، اگر $A+B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $۲A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس A چند برابر مجموع درایه‌های ماتریس B است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) ۱

محاسبات

۱۰- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ i-۲j & i\neq j\end{cases}$ و ماتریس $B=[b_{ij}]_{۳\times۴}$ با درایه‌های $b_{ij}=\begin{cases}i^۲+۱ & i=j\\ j^۲-۱ & i\neq j\end{cases}$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های ماتریس $۳A+B$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۱۵ ۴) ۱۵

آزمون ۵۳ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (ضرب ماتریس‌ها)

پاسخ: ۲۷۵ تا ۲۷۶

۱- اگر $A=\begin{bmatrix}x & ۲\\ a & -۱\end{bmatrix}$ و $A^۲=A$، مقدار $a+x$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۲- ماتریس M مقدار علف، کاهو و کلمی را نشان می‌دهد که هر خرگوش و آهو به‌طور متوسط در روز می‌خورند و ماتریس N تعداد خرگوش و آهوهایی را که گرگ یا شیر به‌طور متوسط در روز می‌خورند نشان داده است. در روز هر شیر به‌طور غیرمستقیم چقدر کاهو می‌خورد؟

$$N=\begin{array}{c}\text{خرگوش}\quad\text{آهو}\\ \begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{گرگ}\\ \text{شیر}\end{array}\qquad M=\begin{array}{c}\text{کلم}\quad\text{کاهو}\quad\text{علف}\\ \begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{خرگوش}\\ \text{آهو}\end{array}$$

۱) ۳۲ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۶

۳- چند ماتریس به فرم $A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ b & a & ۰\\ c & b & a\end{bmatrix}$ وجود دارد به‌طوری که $A^۲=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۸ & ۴ & ۰\\ ۶ & ۸ & ۴\end{bmatrix}$؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) نامتناهی

۴- ماتریس‌های A و B در تساوی $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ صدق می‌کنند. در این صورت کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $AB=I$ ۲) $BA=I$ ۳) $AB=BA$ ۴) $AB=\bar{O}$

۵- اگر $A^۲=A-۲I$ و $A^۵=\alpha A+\beta I$، مقدار $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) -۳ ۴) ۶

۶- اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲n}-A^{۲n+۱}$ کدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\sqrt{۳}$

۷- اگر $A=\begin{bmatrix}b^۲ & ab\\ -ab & -a^۲\end{bmatrix}$، حاصل $A(A-۵I)^۵$ برابر کدام است؟

۱) $۵A$ ۲) $۵^۵I$ ۳) $-۵^۵A$ ۴) $-۵^۵I$

۸- اگر $A=[(i+j)^{۰}]_{۳\times۳}$، توان nاُم A برابر کدام است؟

۱) $۳^{n-۱}A$ ۲) ۳^nA ۳) I ۴) $۳^{n+۱}A$

۹- ماتریس A به صورت $A=[2i-j]_{3\times 3}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 برابر کدام است؟

۱) -36 ۲) -48 ۳) -72 ۴) -24

۱۰- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم $AB=\bar{O}$، چند مورد از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

الف) $c+d=0$

ب) $AB=BA$

پ) اگر $AB=BA$، آن‌گاه ماتریس B قطری است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

آزمون ۵۴ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

پاسخ: ۲۷۶ تا ۲۷۷

۱- اگر $A=[i-j]_{2\times 2}$، $B=[i+j]_{2\times 2}$، $X+Y=A$ و $X-Y=B$، مجموع درایه‌های ماتریس $2X+Y$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۶

۲- ماتریس مربعی A در تساوی $A^2-2A+I=\bar{O}$ صدق می‌کند. ماتریس A^5 برابر کدام است؟

۱) $2A-I$ ۲) $4A-3I$ ۳) $5A-4I$ ۴) $4A+3I$

۳- اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^3+\alpha A+\beta I=\bar{O}$، مقدار $\alpha+\beta$ چقدر است؟

۱) -7 ۲) 10 ۳) -10 ۴) 7

۴- فرض کنید $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & a \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. اگر درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر ۶ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & b & a \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک چهارم مجموع درایه‌های ماتریس A^2 باشد، مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۶- اگر $AB+BA=\bar{O}$ و $AB^2=kB^2A$، مقدار k کدام است؟ $(AB\neq\bar{O})$

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۲

۷- در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & b & a \\ -b & c & a \\ -5 & a & -3 \end{bmatrix}$ درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر هستند و $B=\begin{bmatrix} 3 & c & 1 \\ -1 & a & 4 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$. اگر $C=BA$ و $c_{21}=-1$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) صفر ۴) -1

محاسبات

۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، در ماتریس $(A+I)(A-I)$ درایهٔ سطر دوم و ستون دوم کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) صفر

۹- اگر $A=[i+i^۲]_{۳\times۴}$ و $B=[۲i-۳j]_{۳\times۳}$، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم ماتریس BA کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۵ ۳) ۱۸ ۴) -۳۰

۱۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱۰۱ & ۱۰۰ \\ -۱ & -۱۰۰ \end{bmatrix}$، کدام تساوی درست است؟

۱) $A^۲-A=\bar{O}$ ۲) $A^۲-A-۱۰۱I=\bar{O}$ ۳) $A^۲-A-۱۰۰I=\bar{O}$ ۴) $A^۲-A-۱۰^۴I=\bar{O}$

آزمون ۵۵ دترمینان (۱)

پاسخ: ۲۷۷ تا ۲۷۸

۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & \lvert A\rvert+۲ \\ ۱ & ۲\lvert A\rvert \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $-۲A^۳$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۷ & ۹ \\ ۱۶ & ۴۹ & ۸۱ \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۹ ۳) ۳۰ ۴) ۲۷

۳- اگر $\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & a \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}=k$، مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} ۶ & ۴ & a+۱ \\ ۲ & ۸ & ۲ \\ ۴ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-۴k+۳۶$ ۲) $-۴k-۳۶$ ۳) $۴k-۳۶$ ۴) $۴k+۳۶$

۴- دترمینان $\begin{vmatrix} m+n & n+p & m+p \\ n+p & m+p & m+n \\ m+p & n+p & m+n \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) $۲(m+n+p)(m+n)(n+p)$ ۲) $۲(m+n+p)(n-m)(n-p)$

۳) $۲(m+n+p)(m+n)(m+p)$ ۴) $۲(m+n+p)(m-n)(n-p)$

۵- خط $\begin{vmatrix} x & y & ۳ \\ -۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix}=۰$ از نقطهٔ (m,n) عبور می‌کند. مقدار $۵n-m$ برابر کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) -۲۱ ۳) ۱۱ ۴) -۱۱

۶- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $A^۳+۲I$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵۰ ۳) -۲ ۴) ۳۰

۷- اگر $a+b+c=-5$، مقدار $\begin{vmatrix} a & b & c+2 \\ a & b+2 & c \\ a+2 & b & c \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) -12 ۲) -4 ۳) 4 ۴) 12

۸- اگر $abc\neq 0$، از معادلهٔ $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=0$ کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

۱) $a+b+c=0$ ۲) $a-b+c=0$ ۳) $a+b-c=0$ ۴) $-a+b+c=0$

۹- اگر A یک ماتریس 3×3 با دترمینان ۴ باشد، حاصل $2\left|2\left|2A^3\right|A\right|$ برابر کدام است؟

۱) 2^{33} ۲) 2^{32} ۳) 2^{34} ۴) 2^{30}

۱۰- به کدام‌یک از درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 7 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ هر مقداری اضافه کنیم حاصل دترمینان این ماتریس تغییر نمی‌کند؟

۱) a_{23} ۲) a_{22} ۳) a_{31} ۴) a_{21}

آزمون ۵۶ دترمینان (۲)

پاسخ: ۲۷۸ تا ۲۷۹

۱- اگر $A=[2i-3j]_{2\times 2}$، مقدار $|A|$ برابر کدام است؟

۱) -2 ۲) 6 ۳) -6 ۴) 2

۲- مقدار $\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) 1 ۲) -2 ۳) 2 ۴) -1

۳- اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$، مقدار دترمینان ماتریس $-\frac{1}{24}A^3B^4$ برابر کدام است؟

۱) 4 ۲) 12 ۳) -4 ۴) -12

۴- مقدار x در معادلهٔ $\begin{vmatrix} x & -2x & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=8$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۵- شیب خط $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$ برابر کدام است؟

۱) 3 ۲) -3 ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

محاسبات

۶- دترمینان $\begin{vmatrix} a^2-c^2 & -a^2 & 0 \\ b^2-a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & a^2-b^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) $(a+b+c)^2$ ۲) صفر ۳) $a^2+b^2+c^2$ ۴) $abc(a+b+c)$

۷- اگر دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ برابر a^3+1 باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -1 ۴) ۲

۸- دترمینان $\begin{vmatrix} c & b+1 & a+2 \\ c+2 & b & a+1 \\ c+1 & b+2 & a \end{vmatrix}$ با فرض $a+b+c=3$ برابر کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -12 ۳) -18 ۴) ۱۸

۹- اگر $k=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix}$، حاصل $\begin{vmatrix} 24 & 2 & 6a \\ 18 & 9 & 6 \\ 18 & 1 & b+1 \end{vmatrix}$ چقدر است؟

۱) $36k-180$ ۲) $36k+180$ ۳) $-36k-180$ ۴) $-36k+180$

۱۰- مقدار دترمینان ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۴ که در رابطهٔ $\left|\sqrt{2}|A|A\right|=\left||A|A\right|+\left|\frac{4A}{|A|}\right|$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) $\sqrt[8]{\frac{4}{3}}$ ۲) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt[8]{3}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt[8]{3}}$

آزمون ۵۷ وارون ماتریس

پاسخ: ۲۷۹ تا ۲۸۰

۱- A یک ماتریس وارون‌پذیر 3×3 است. اگر $A^{-1}=A$، دترمینان ماتریس $I-\lambda A^4$ برابر کدام است؟ ($\lambda\in\mathbb{R}$ و I ماتریس همانی 3×3 است.)

۱) $1-\lambda^2$ ۲) $(1-\lambda)^2$ ۳) $1-\lambda^3$ ۴) $(1-\lambda)^3$

۲- اگر $A^3=2I$، وارون ماتریس $A+2I$ کدام است؟

۱) A^2-I ۲) $\frac{1}{5}(A^2-2A+4I)$ ۳) $\frac{1}{10}(A^2-I)$ ۴) $\frac{1}{10}(A^2-2A+4I)$

۳- اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $(A^3+A^2-A+I)^{-1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $-\sqrt{3}$

۴- اگر ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B در رابطهٔ $2A+2B=3AB$ صدق کنند، ماتریس $A^{-1}+B^{-1}$ برابر کدام است؟

۱) $2I$ ۲) $3I$ ۳) $\frac{2}{3}I$ ۴) $\frac{3}{2}I$

۵- اگر A یک ماتریس 2×2 باشد به‌طوری که $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس A چقدر است؟

۱) $\frac{3}{14}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $-\frac{3}{14}$ ۴) $-\frac{3}{7}$

آزمون ۵۲

۱- گزینهٔ ۱ درایه‌های هر دو ماتریس را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۰ \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس در ماتریس $A+B=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۰ & ۶ \\ ۶ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}$ درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر مساوی‌اند.

۲- گزینهٔ ۴ در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطری اصلی صفر هستند، پس

$$m^۲+m=۰\Rightarrow m(m+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases} m=۰ \\ m=-۱ \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر m برابر -۱ است.

۳- گزینهٔ ۱ ابتدا درایه‌های این ماتریس را با تعریف داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} -۲ & -۱ & ۰ \\ -۱۰ & -۸ & -۶ \\ -۲۴ & -۲۱ & -۱۸ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر -۹۰ است.

۴- گزینهٔ ۳ درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ماتریس}=۲۹$$

۵- گزینهٔ ۲ در ماتریس گزینهٔ (۱) چون $a_{ij}=-a_{ji}$، پس درایه‌های نظیر بالا و پایین قطر اصلی قرینهٔ یکدیگر می‌شوند. پس گزینهٔ (۱) درست نیست.

در ماتریس گزینهٔ (۳) چون $\sin(i-j)=-\sin(j-i)$، پس درایه‌های نظیر بالا و پایین قطر اصلی قرینهٔ یکدیگر می‌شوند، بنابراین گزینهٔ (۳) نیز نمی‌تواند درست باشد.

در ماتریس گزینهٔ (۴) به ازای هر $i\neq j$، $a_{ij}\neq a_{ji}$، به عنوان مثال $a_{۱۲}=۱+۴=۵$ ولی $a_{۲۱}=۲+۲=۴$، پس گزینهٔ (۴) نیز نمی‌تواند درست باشد.

در گزینهٔ (۲) به‌ازای هر $i\neq j$، $\cos(i-j)=\cos(j-i)$، پس گزینهٔ (۲) ماتریس مورد نظر است.

$$[\cos(i-j)]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} \cos۰ & \cos(-۱) & \cos(-۲) \\ \cos۱ & \cos۰ & \cos(-۱) \\ \cos۲ & \cos۱ & \cos۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos۰ & \cos۱ & \cos۲ \\ \cos۱ & \cos۰ & \cos۱ \\ \cos۲ & \cos۱ & \cos۰ \end{bmatrix}$$

۶- گزینهٔ ۲ درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۲}=[\tfrac{۱}{۲}]=۰,\quad a_{۲۲}=[\tfrac{۲}{۲}]=۱,\quad a_{۳۲}=[\tfrac{۳}{۲}]=۱$$

اکنون می‌نویسیم

$$\text{مجموع درایه‌های ستون دوم}=a_{۱۲}+a_{۲۲}+a_{۳۲}=۰+۱+۱=۲$$

۷- گزینهٔ ۱ برای هر گزینه ماتریس مربوط به ضابطه را می‌نویسیم:

گزینهٔ (۱)

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۸ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

گزینهٔ (۲)

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

گزینهٔ (۳)

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

گزینهٔ (۴)

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۳ & -۸ \\ ۱ & -۲ & -۷ \\ ۲ & -۱ & -۶ \end{bmatrix}$$

۸- گزینهٔ ۴ ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در این ماتریس درایهٔ ۲ وجود ندارد.

۹- گزینهٔ ۲ از دستگاه صورت سؤال ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A+B=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} \\ ۲A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \end{cases}$$

معادلهٔ بالا را از معادلهٔ پایین کم می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس A را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$B=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نهایت می‌نویسیم

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A}{\text{مجموع درایه‌های ماتریس } B}=-\frac{۳}{۷}$$

۱۰- گزینهٔ ۲ ابتدا ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & -۵ & -۷\\ ۰ & ۱ & -۴ & -۶\\ ۱ & -۱ & ۱ & -۵\end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۸ & ۱۵\\ ۰ & ۵ & ۸ & ۱۵\\ ۰ & ۳ & ۱۰ & ۱۵\end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

بنابراین

$$۳A+B=۳\begin{bmatrix}۱ & -۳ & -۵ & -۷\\ ۰ & ۱ & -۴ & -۶\\ ۱ & -۱ & ۱ & -۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۸ & ۱۵\\ ۰ & ۵ & ۸ & ۱۵\\ ۰ & ۳ & ۱۰ & ۱۵\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۵ & -۶ & -۷ & -۶\\ ۰ & ۸ & -۴ & -۳\\ ۳ & ۰ & ۱۳ & ۰\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $۳A+B$ مساوی ۳ است.

آزمون ۵۳

۱- گزینهٔ ۳ ابتدا ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم و سپس آن را مساوی A قرار می‌دهیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲ & x\\ -۱ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & x\\ -۱ & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴-x & ۲x+ax\\ -۲-a & -x+a^۲\end{bmatrix}$$

$$A^۲=A\Rightarrow\begin{bmatrix}۴-x & ۲x+ax\\ -۲-a & -x+a^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & x\\ -۱ & a\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}۴-x=۲\Rightarrow x=۲\\ -۲-a=-۱\Rightarrow a=-۱\end{cases}\Rightarrow a+x=۱$$

۲- گزینهٔ ۳ ماتریس NM را به‌دست می‌آوریم. درایهٔ سطر دوم و ستون دوم این ماتریس میزان کاهویی است که شیر به صورت غیرمستقیم خورده است:

$$NM=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}? & ? & ?\\ ? & ۱۴ & ?\end{bmatrix}$$

۳- گزینهٔ ۲ ماتریس $A^۲$ را محاسبه کرده و با ماتریس $A^۲$ داده شده در صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ b & a & ۰\\ c & b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ b & a & ۰\\ c & b & a\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^۲ & ۰ & ۰\\ ۲ab & a^۲ & ۰\\ ۲ac+b^۲ & ۲ab & a^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۸ & ۴ & ۰\\ ۶ & ۸ & ۴\end{bmatrix}$$

از این تساوی نتیجه می‌گیریم

$$a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲$$

چون $۲ab=۸$، پس به ازای $a=۲$ به دست می‌آید $b=۲$ و به ازای $a=-۲$ به دست می‌آید $b=-۲$. اکنون از تساوی $۲ac+b^۲=۶$ به ازای $a=b=۲$ به دست می‌آید

$$۴c+۴=۶\Rightarrow c=\frac{۱}{۲}$$

و به ازای $a=b=-۲$ به دست می‌آید

$$-۴c+۴=۶\Rightarrow c=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین دو دسته جواب به دست می‌آید

$$a=b=۲,\quad c=\frac{۱}{۲}\qquad(۱)$$

$$a=b=-۲,\quad c=-\frac{۱}{۲}\qquad(۲)$$

۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲$$

بنابراین از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A^۲+AB+BA+B^۲=A^۲+۲AB+B^۲\Rightarrow BA=AB$$

۵- گزینهٔ ۱ دو طرف تساوی $A^۲=A-۲I$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^۴=A^۲-۴A+۴I=(A-۲I)-۴A+۴I=-۳A+۲I$$

دو طرف تساوی را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^۵=-۳A^۲+۲A=-۳(A-۲I)+۲A=-A+۶I$$

با توجه به فرض سؤال چون $A^۵=\alpha A+\beta I$، پس $\alpha=-۱$ و $\beta=۶$. در نتیجه $\alpha+\beta=۵$.

۶- گزینهٔ ۲ ابتدا ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^{۲n}=I$ و $A^{۲n+۱}=A$، پس

$$A^{۲n}-A^{۲n+۱}=I-A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & ۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها}=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱$$

۷- گزینهٔ ۳ ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}ab & b^۲\\ -a^۲ & -ab\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ab & b^۲\\ -a^۲ & -ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

بنابراین $A^n=\bar{O}\ (n\geq۲)$. پس در محاسبهٔ ماتریس $A(A-۵I)^۵$ تمام جملات به صورت $A^n\ (n\geq۲)$ برابر ماتریس صفر هستند، در نتیجه

$$A(A-۵I)^۵=A(\underbrace{A^۵-۲۵A^۴+\cdots+۵(۵I)^۴}_{\bar{O}}A-۵^۵I)$$

$$=A(۵^۵A-۵^۵I)=\underbrace{۵^۵A^۲}_{\bar{O}}-۵^۵A=-۵^۵A$$

۸- گزینهٔ ۱ عبارت $(i+j)^{۰}$ همواره برابر یک است، پس

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۳&۳\\۳&۳&۳\\۳&۳&۳\end{bmatrix}=۳A$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=۳A\times A=۳A^{۲}=۹A=۳^{۲}A$$

$$A^{۴}=A^{۳}\times A=۹A\times A=۹A^{۲}=۲۷A=۳^{۳}A$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$A^{n}=۳^{n-۱}A$$

۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۳&۲&۱\\۵&۴&۳\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۳&۲&۱\\۵&۴&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۳&۲&۱\\۵&۴&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴&-۴&-۴\\۱۴&۸&۲\\۳۲&۲۰&۸\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}-۴&-۴&-۴\\۱۴&۸&۲\\۳۲&۲۰&۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۳&۲&۱\\۵&۴&۳\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۳۶&-۲۴&-۱۲\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های سطر اول $A^{۳}$ برابر $-۷۲=-۱۲-۲۴-۳۶-$ است.

۱۰- گزینهٔ ۱ چون $AB=\bar{O}$، پس

$$\begin{bmatrix}۰&۱\\۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow\begin{bmatrix}c&d\\۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow\begin{cases}c=۰\\d=۰\end{cases}$$

بنابراین رابطهٔ (الف)، یعنی $c+d=۰$ درست است. اکنون تساوی $AB=BA$ را بررسی می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۰&۱\\۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}a&b\\۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱\\۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&a\\۰&۰\end{bmatrix}$$

پس رابطهٔ (ب) لزوماً درست نیست.

مسلماً اگر $AB=BA$، آن‌گاه $a=۰$، پس $B=\begin{bmatrix}۰&b\\۰&۰\end{bmatrix}$ و ماتریس B لزوماً قطری نیست. درنتیجه گزارهٔ (پ) نیز درست نیست.

آزمون ۵۴

۱- گزینهٔ ۴ از برابری‌های $X-Y=B$ و $X+Y=A$ به‌دست می‌آید

$$X=\frac{A+B}{۲}\ ,\quad Y=\frac{A-B}{۲}$$

در نتیجه

$$۲X+Y=۲(\frac{A+B}{۲})+(\frac{A-B}{۲})=A+B+\frac{A-B}{۲}=\frac{۲A+۲B+A-B}{۲}$$

$$=\frac{۳A+B}{۲}=\frac{[۳(i-j)+i+j]}{۲}=[۲i-j]=\begin{bmatrix}۱&۰\\۳&۲\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ برابر ۶ است.

۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$A^{۲}-۲A+I=\bar{O}\Rightarrow A^{۲}=۲A-I\Rightarrow A^{۴}=(۲A-I)^{۲}$$

$$A^{۴}=۴A^{۲}+I-۴A\xrightarrow{A^{۲}=۲A-I}A^{۴}=۴(۲A-I)+I-۴A$$

$$A^{۴}=۴A-۳I\xrightarrow{\text{در A ضرب می‌کنیم}}A^{۵}=۴A^{۲}-۳A$$

$$A^{۵}=۴(۲A-I)-۳A\Rightarrow A^{۵}=۵A-۴I$$

۳- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه

$$A^{۲}=(a+d)A-(ad-bc)I$$

در اینجا $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۱\end{bmatrix}$، پس

$$A^{۲}=۲A-(۱-۲)I=۲A+I\xrightarrow{A\times}$$

$$A^{۳}=۲A^{۲}+A=۲(۲A+I)+A=۴A+۲I+A=۵A+۲I$$

بنابراین

$$A^{۳}-۵A-۲I=\bar{O}$$

با مقایسهٔ این تساوی با $A^{۳}+\alpha A+\beta I=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $\alpha=-۵$ و $\beta=-۲$. بنابراین $\alpha+\beta=-۷$.

۴- گزینهٔ ۱ کافی است درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB را به‌دست آوریم:

درایهٔ سطر دوم و ستون سوم AB = (سطر دوم A)(ستون سوم B)

$$=\begin{bmatrix}۳&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\۱\\۲\end{bmatrix}=۳m+۱+۲=۳m+۳$$

این درایه برابر ۶ است، پس

$$۳m+۳=۶\Rightarrow۳m=۳\Rightarrow m=۱$$

۵- گزینهٔ ۲ ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}a&b&۰\\a&b&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&۰\\a&b&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^{۲}+ab&ab+b^{۲}&۰\\a^{۲}+ab&ab+b^{۲}&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$